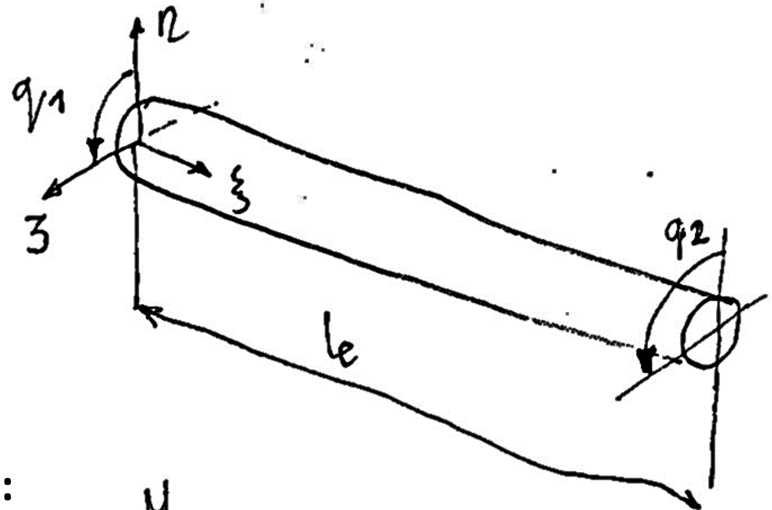
Politechnika Warszawska | Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa | Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Metoda elementów skończonych (MES1)

Wykład 8B. Element pręta skręcanego

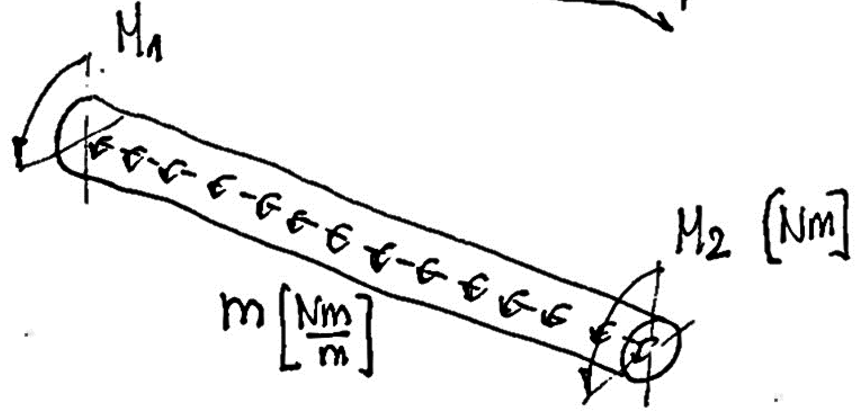
04.2022

Element skończony pręta obciążony momentem skręcającym



q_1, q_2 - Kąty obrotu

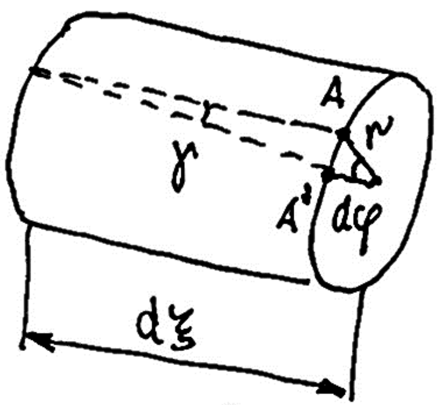
Obciążenie:



M- Moment

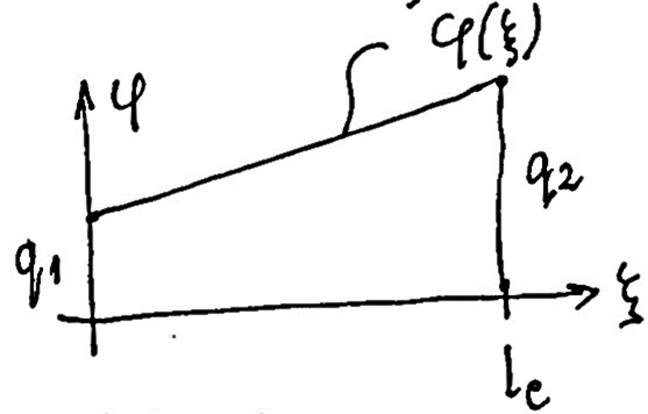
Moment skręcający na jednostkę długości

Element skręcany - deformacje



$$AA' \cong \gamma \cdot d\xi = r\, d\varphi$$

$$\gamma = r\,\frac{d\varphi}{d\xi}$$



Funkcje kształtu: $\boxed{\begin{aligned} N_1(\xi) &= 1 - \frac{\xi}{l_e} \\ N_2(\xi) &= \frac{\xi}{l_e} \end{aligned}}$

$$\varphi(\xi) = N_1(\xi)\cdot q_1 + N_2(\xi)\cdot q_2 = $$

$$= \underset{1\times 2}{\lfloor N \rfloor} \cdot \underset{2\times 1}{\{q\}_e}$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \left\lfloor \frac{dN_1}{d\xi},\ \frac{dN_2}{d\xi} \right\rfloor \cdot \underset{2\times 1}{\{q\}_e} = \left\lfloor -\frac{1}{l_e},\ \frac{1}{l_e} \right\rfloor \cdot \underset{2\times 1}{\{q\}_e}$$

Element skręcany – energia odkształcenia

$$U_e = \frac{1}{2}\int_{\Omega_e} \tau \cdot \gamma \, d\Omega_e = \frac{1}{2}\int_{\Omega_e} G \cdot \gamma^2 \, d\Omega_e = \frac{1}{2}\int_{\Omega_e} G \, r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right)^2 d\Omega_e =$$

prawo Hooke’a:

$$\tau = G \cdot \gamma = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \gamma$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{l_e} G \, \frac{d\varphi}{d\xi} \cdot \frac{d\varphi}{d\xi} \cdot \boxed{\int_A r^2 \, dA} \, d\xi =$$

Moment bezwładności na skręcanie

$$J_s = \frac{\pi d^4}{32}$$ Dla kołowego przekroju

Element skręcany – macierz sztywności

$$= \frac{1}{2}\int_0^{l_e} GJ_s \cdot \frac{d\varphi}{d\xi} \cdot \frac{d\varphi}{d\xi}\, d\xi =$$

$$\underset{1\times 2}{\lfloor q \rfloor_e} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{dN_1}{d\xi} \\ \frac{dN_2}{d\xi} \end{Bmatrix} \qquad \left\lfloor \frac{dN_1}{d\xi}, \frac{dN_2}{d\xi} \right\rfloor \cdot \underset{2\times 1}{\{q\}_e}$$

$$= \frac{1}{2} \lfloor q \rfloor_e \cdot [k]_e \cdot \{q\}_e \quad ;$$

gdzie:

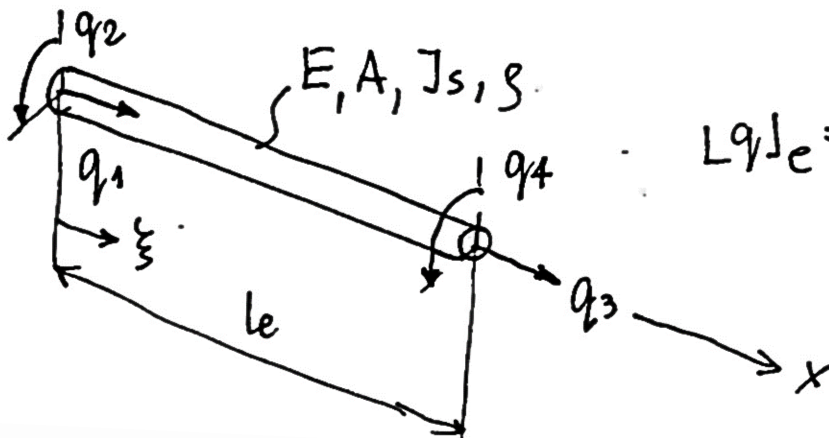
$$\underset{2\times 2}{[k]_e} = GJ_s \begin{bmatrix} \int_0^{l_e} \frac{dN_1}{d\xi}\frac{dN_1}{d\xi} d\xi & \int_0^{l_e} \frac{dN_1}{d\xi}\frac{dN_2}{d\xi} d\xi \\ \int_0^{l_e} \frac{dN_2}{d\xi}\frac{dN_1}{d\xi} d\xi & \int_0^{l_e} \frac{dN_2}{d\xi}\frac{dN_2}{d\xi} d\xi \end{bmatrix} = \boxed{\frac{GJ_s}{l_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

Element skręcany – energia potencjalna obciążenia

$$W_e = \underset{1\times 2}{\lfloor F \rfloor_e} \cdot \{q\}_e + M_1 \cdot q_1 + M_2 \cdot q_2$$

$$\underset{1\times 2}{\lfloor F \rfloor_e} = \left\lfloor \int_0^{l_e} m(\xi) \cdot N_1(\xi)\, d\xi \,,\ \int_0^{l_e} m(\xi) \cdot N_2(\xi)\, d\xi \right\rfloor$$

Element obciążony siłą osiową i momentem skręcającym



$$\lfloor q \rfloor_e = \lfloor q_1, q_2, q_3, q_4 \rfloor$$

Element obciążony siłą osiową:

$$\underset{2\,\mathrm{x}\,2}{[k]_A} = \frac{EA}{l_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lfloor q \rfloor_A = \lfloor q_1, q_3 \rfloor \quad \text{(translational D.O.F)}$$

$$\underset{4\,\mathrm{x}\,4}{[k]_A^*} = \frac{EA}{l_e}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Element obciążony momentem skręcającym:

$$\underset{2\,\mathrm{x}\,2}{[k]_T} = \frac{GJ_s}{l_e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lfloor q \rfloor_T = \lfloor q_2, q_4 \rfloor \quad \text{(rotational D.O.F)}$$

$$\underset{4\,\mathrm{x}\,4}{[k]_T^*} = \frac{GJ_s}{l_e}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

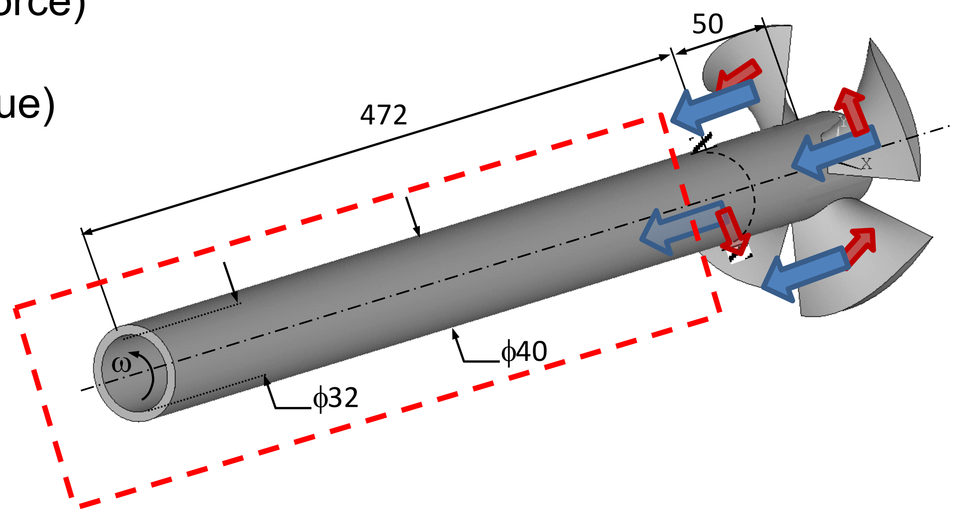
Element obciążony siłą osiową i momentem skręcającym – macierz sztywności

$$
\underset{4\,x\,4}{[k]_e} = \underset{4\,x\,4}{[k]_A^*} + \underset{4\,x\,4}{[k]_T^*} = \frac{1}{l_e}\begin{bmatrix} EA & 0 & -EA & 0 \\ 0 & GJ_s & 0 & -GJ_s \\ -EA & 0 & EA & 0 \\ 0 & -GJ_s & 0 & GJ_s \end{bmatrix}
$$

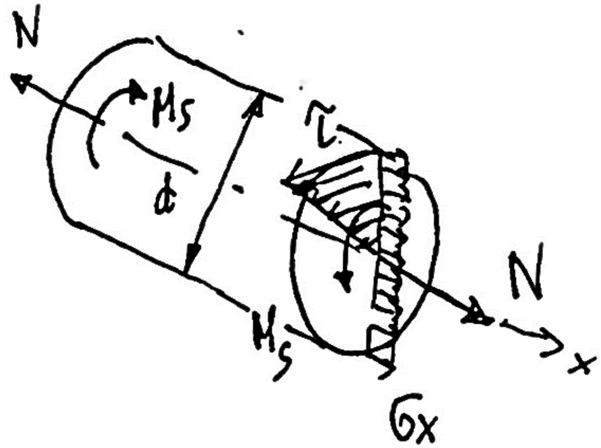
Przykład: Element obciążony siłą osiową i momentem skręcającym użyty w modelu MES wału napędowego okrętu

lift force (axial force)

drag force (torque)



Stan naprężenia w modelu MES wału napędowego okrętu



$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot \frac{du}{d\xi} =$$

$$= E \left\lfloor \frac{dN_1}{d\xi}, \frac{dN_2}{d\xi} \right\rfloor \cdot \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_3 \end{Bmatrix}_A =$$

$$= E \frac{q_3 - q_1}{l_e}$$

$$\frac{dN_1}{d\xi} = -\frac{1}{l_e} \quad , \quad \frac{dN_2}{d\xi} = \frac{1}{l_e}$$

$$\tau(r) = G \cdot \gamma(r) = G \cdot r \frac{d\varphi}{d\xi} = G \cdot r \left\lfloor \frac{dN_1}{d\xi}, \frac{dN_2}{d\xi} \right\rfloor \cdot \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_4 \end{Bmatrix}_T =$$

$$= G \cdot \frac{q_4 - q_2}{l_e} \cdot r \quad , \quad \tau_{max} = \frac{Gd}{2} \cdot \frac{q_4 - q_2}{l_e}$$

$$\sigma_{eqv}^{max} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{max}^2}$$